华東師範大學

一、填空题

1、两边求导，得

$-\sin(xy)(y+xy')+(1+y')e^{x+y}=0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(e^{x+y}-x\sin(xy))=y\sin(xy)$

$\Rightarrow dy=\frac{y\sin(xy)-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin(xy)}dx$

2、$y'=\frac{e^x+\frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}$

$y'|_{x=0}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3、$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-ax+3}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)^2+(2-a)x+2}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)^2+(2-a)(x-1)+4-a}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\left[(x-1)+(2-a)+\frac{4-a}{x-1}\right]=b$

故 $a=4 \quad b=-2$

4、设切点 (x_0,x_0^2)

有 $\begin{cases} x_0^2=a\cancel{x_0}\ln x_0 \\ \frac{a}{x_0}=2x_0 \end{cases}$，$\cancel{x_0\neq0}$ $a\neq0$

则 $\begin{cases} x_0=\cancel{\pm}\sqrt{e} \\ a=\cancel{\pm}2e \end{cases}$

~~当切点为 $(0,0)$ 时~~ 当 $a=0$ 时

显然相切，则 $a=0$ 或 $a=\cancel{\pm}2e$

5、$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\cos x\cdot\ln(1+x^2)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1+(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x\sin x\cancel{+\frac{1}{2}x^2}}{\cos x\cdot x^2}+\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\cos x\cdot x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2\cos x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2\cos x}$

$=1$

二、选择题

6、$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

Δx 换为 $-\Delta x$，有 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}$

故 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-f'(x_0)$，选 D

7、① $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{1+2x+\cdots+nx^{n-1}}{1}$

$=\frac{n+1}{2}n$ 选 D

② ~~$\lim\limits_{x\to1}\frac{x+x^2\cdots+x^n-n}{x-1}$~~

$=\lim\limits_{x\to1}$ ~~$(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x$~~ $\frac{x(1-x^n)-n(1-x)}{(1-x)(x-1)}$

華東師範大學

② 原式 $=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\cancel{1+1+1}\ 1+(1+x)+\cdots$

$=\dfrac{n(n+1)}{2}$

具体可查 x^n-1 因式分解，总之按后代入 $x=1$，有1一直加到n的形式

8、$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$

~~在~~ $\cancel{\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\cdots}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=0$

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

则 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=0$

9、$\dfrac{dx}{dt}=2$

对②两边求导，得

$e^y+tyе^y+y'=0$

则 $\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{e^y}{1+te^y}$

故 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{e^y}{2(1+te^y)}$

$d\dfrac{dy}{dx}/dt=-\dfrac{2y'e^y(1+te^y)-(2e^y+2ty'e^y)e^y}{[2(1+te^y)]^2}$

~~则 $\frac{d^2y}{}$~~ 当 $t=0$ 时，$x=-1$，$y=-1$

$\dfrac{dy}{dt}=y'=-\dfrac{1}{e}$

则 $\dfrac{d^2y}{dx}/dt=\dfrac{\frac{2}{e}\cdot\frac{1}{e}-\frac{2}{e^2}}{4}=\cdots\dfrac{1}{e^2}$

故 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(\dfrac{dy}{dx}/dt\right)/\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{2e^2}$

(11) ① $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^n}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{(1+2x)^{\frac12}-(1+3x)^{\frac13}}{x^n}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{(1+x-\frac18\cdot4x^2+o(x^2))-(1+x-\frac19\cdot9x^2+o(x^2))}{x^n}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{\frac12x^2+o(x^2)}{x^n}$

当 $n=2$ 时，原式 $=\frac12$

$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$

$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^m\dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}+o(x^{2m+2})$

$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^m\dfrac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m+1})$

$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^{n+1})$

$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

② 对 $\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}$ 求导，使其在 $x=0$ 时不再为0。一阶导：$(1+2x)^{-\frac12}-(1+3x)^{-\frac23}$ 不行

二阶导：$-(1+2x)^{-\frac32}+2(1+3x)^{-\frac53}=1$

故 x^n 也需导两次 ~~变为常~~，在 $x=0$ 处变为不为0数

故是 x 的二阶无穷小，$n=2$

華東師範大學

11. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(2^{x^2}-1)\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \ln 2 \cdot x}{\frac{1}{2}x^2}$

$= 2\ln 2$

12. $f(x) = \cancel{\frac{1+x}{1+x^{2n}}} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$

① $x=1$ 则 $f(x) = \cancel{2}\ 1$

② $|x|>1$，$f(x)=0$

③ $|x|<1$，$f(x) = 1+x$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0 \neq \lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2 \neq \lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x) = 0$

故 $x=1$ 是跳跃间断点.

$x=-1$ 是可去间断点

13. $f'(x) = 2e^{2x}\sin(2x+1) + 2e^{2x}\cos(2x+1)$

$= 2\sqrt{2}e^{2x}\sin(2x+1+\frac{\pi}{4})$

$f^{(n)}(x) = (2\sqrt{2})^n e^{2x}\sin(2x+1+\frac{n}{4}\pi)$

则 $f^{(200)}(0) = 2^{300}\sin 1$.

14. 两边取极限，得

$\lim\limits_{x\to 0} \cancel{(1+\tan x)} f(1+\tan x) - 3\lim\limits_{x\to 0} f(1-\tan x)$

$= \lim\limits_{x\to 0}(8x+o(x))$

由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，得 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则有

$f(1)-3f(1) = 8^0 + \lim\limits_{x\to 0} o(x) = 8$

故 $f(1) = \cancel{-4}\ 0$

~~又 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$~~

~~令 $\Delta x = \tan x$ $x_0 = 1-\tan x$,~~

~~等于~~ 两边同除以 x 再求极限

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(1+\tan x)-3f(1-\tan x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{8x+o(x)}{x}$

$\lim\limits_{\tan x\to 0} \frac{f(1+\tan x)-f(1)}{\tan x} + 3\lim\limits_{\tan x\to 0} \frac{f(1-\tan x)-3f(1)}{-\tan x} = 8$

则 $4f'(1) = 8$ 即 $f'(1) = 2$

故由 $T=10$，可知 $f'(11) = f'(1) = 2$ $f(1) = f(11) = 0$

则 $y = 2(x-11) \Rightarrow y = 2x-22$

15、由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ 可知

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|q|$ （记为$|q|$）

则对任意 $\varepsilon_1>0$，存在 $N\in N^*$，当 $n>N$

时，有 $\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|-|q|\right|<\varepsilon_1$

又 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|-|q|<\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-|q|\right|$

则 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\varepsilon_1+|q|$

又 $|q|<1$，则 $\exists\varepsilon_1$ 使得 $\varepsilon_1+|q|<1$

故 $|a_{n+1}|<(\varepsilon_1+|q|)|a_n|$

对于 $n=N+m$，$m\in N^*$，有

$|a_{N+m}|<(\varepsilon_1+|q|)|a_{N+m-1}|<\cdots$

$<|a_{N+1}|(\varepsilon_1+|q|)^{m-1}$

又 $\lim\limits_{m\to\infty}(\varepsilon_1+|q|)^{m-1}=0$

则 $\lim\limits_{m\to\infty}|a_{N+m}|=0$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

思考：$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=a$

$\Leftarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$

16. 思考：当 $n=2$ 时，设 $g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{2})$

由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则 $g(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$

上连续. $g(0)=f(0)-f(\frac{1}{2})$ $g(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-f(1)$

又 $f(0)=f(1)$，则 $g(0)+g(\frac{1}{2})=0$

由介值定理可知，若 $g(0)\neq g(\frac{1}{2})$，则

$g(0)\cdot g(\frac{1}{2})<0$，则 $\exists\xi\in(0,\frac{1}{2})\subset(0,1)$，使

得 $g(\xi)=0$，则 $\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=f(\frac{1}{2}+\xi)$

若 $g(0)=g(\frac{1}{2})$，显然存在

证明：令 $g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$，则 $g(x)$

在 $[0,\frac{n-1}{n}]$ 上连续. $g(0)=f(0)-f(\frac{1}{n})$

$g(\frac{1}{n})=f(\frac{1}{n})-f(\frac{2}{n})\cdots$

$g(\frac{m}{n})=f(\frac{m}{n})-f(\frac{m+1}{n})$，$m\leq n-1$ 且 $m\in N^*$

$g(\frac{n-1}{n})=f(\frac{n-1}{n})-f(1)$. 累加，可得

$g(\frac{1}{n})+g(\frac{2}{n})+\cdots+g(\frac{n-1}{n})=0$

若 $g(\frac{m}{n})$ 不全为0，$m\in[1,n-1]$，则 $\exists m_1,m_2$

$\in[1,n-1]$，$m_1<m_2$，使得 $g(\frac{m_1}{n})g(\frac{m_2}{n})<0$

由介值定理可知，$\exists\xi\in(\frac{m_1}{n},\frac{m_2}{n})\subset(0,1)$

使得 $g(\xi)=0$，故 $\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})$

若 $g(\frac{m}{n})$ 全为0，显然存在

故结论成立.