《高等数学（一）》期中考试试卷

2024 — 2025 学年　第一学期

一、填空题 ($20' = 4' \times 5$)

1. 已知函数 $y = f(x)$ 由方程 $\cos(xy) + e^{x+y} = 0$ 确定，则微分 $dy =$ ______________。

2. 设 $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$，则 $y'(0) =$ ______________。

3. 若 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-ax+3}{x-1} = b$，则 $a =$ _____，$b =$ _____。

4. 若曲线 $y = x^2$ 与 $y = a\ln x$ 相切，则 $a =$ ______________。

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\cos x\cdot\ln(1+x^2)} =$ ______________。

二、选择题 ($20' = 4' \times 5$)

6. 若函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可导，则下列式子中错误的是（　　）。

A. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x} = 2f'(x_0)$　　B. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

C. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} = f'(x_0)$　　D. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$

7. 极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1} =$（　　）。

A. 0　　B. n　　C. $n(n-1)$　　D. $\dfrac{n(n+1)}{2}$

8. 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) =$（　　）。

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

9. 设方程组 $\begin{cases} x = 2t-1, \\ te^y + y + 1 = 0 \end{cases}$ 确定了 y 是 x 的函数，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} =$（　　）。

A. $\dfrac{1}{e^2}$　　B. $\dfrac{1}{2e^2}$　　C. $-\dfrac{1}{e}$　　D. $-\dfrac{1}{2e}$

10. 当 $x \to 0$ 时，无穷小量 $\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}$ 关于 x 的阶是（　　）。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

三、计算题 $(40' = 10' \times 4)$

11. 计算函数极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{(2^x-1)\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}$。

12. 求函数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ 所有的间断点及其所属类型。

13. 设 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}\sin(2x+1)$，求$f^{(200)}(0)$。

14. 已知 $f(x)$ 是周期为 10 的连续函数，它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\tan x)-3f(1-\tan x)=8x+o(x),$$

且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(11,f(11))$ 处的切线方程。

四、证明题 $(20' = 10' \times 2)$

15. 设有数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$，且 $|q|<1$。证明：$\lim_{n\to\infty}a_n=0$。

16. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$。证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=f(\xi+\dfrac{1}{n})$（$n\geq 2$ 为自然数）。