华东师范大学期中试卷

2024–2025 学年第 2 学期

课程名称：高等数学（二）

学生姓名：________________　　学　　号：________________

专　　业：________________　　年级/班级：________________

课程性质：专业必修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

……………………………………………………………………………………………………

一、选择题（每题4分，共20分）

1. 设直线$L_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{1}$ 与直线$L_2 : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 5 \end{cases}$ 的夹角为θ，则$\cos\theta$ 的值为（）

   A. $\frac{1}{\sqrt{14}}$　　B. $\frac{2}{\sqrt{133}}$　　C. $\frac{3}{\sqrt{14}}$　　D. $\frac{8}{\sqrt{133}}$

2. 设$f(x, y) = x^2 + 2xy$ 在点$(1, 1)$ 处沿方向$\vec{l} = (1, -1)$ 的方向导数为（）

   A. 0　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $-2\sqrt{2}$

3. 设$z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$，则$\frac{\partial z}{\partial x} =$（）

   A. $\frac{y}{x^2+y^2}$　　B. $-\frac{y}{x^2+y^2}$　　C. $\frac{x}{x^2+y^2}$　　D. $-\frac{x}{x^2+y^2}$

4. 设积分区域D 由$y = x, y = 0, x = 1$ 围成，则$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$（）

   A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{8}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

5. 在极坐标下，二重积分$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的面积微元为（）

   A. $\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$　　B. $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$　　C. $r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$　　D. $r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

二、填空题（每题4分，共20分）

1. 点$P(1, 2, 3)$ 到平面$2x - y + 2z - 6 = 0$ 的距离为____。

2. 函数$z = \ln(x + y)$ 在点$(1, 2)$ 处的全微分$\mathrm{d}z =$ ____。

3. 设$z = x^2 \sin y$，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ ____。

4. 设积分区域D 为：$1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$ 且$y \geqslant 0$, $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ____.

5. 交换三重积分$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{x+y} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z$ 的积分次序，按x, z, y 的次序积分, 则积分=____。

三、计算题（每题10分，共50分）

1. 设平面薄板D由曲线$y = x^2$与$y = \sqrt{x}$围成，其面密度函数为$\rho(x, y) = xy$。求该薄板的重心坐标$(\bar{x}, \bar{y})$。

2. 设$z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$，其中f具有连续偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$。

3. 利用拉格朗日乘数法，求函数$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$在约束条件$x + y + z = 1$和$x - y + 2z = 0$下的极值。

4. 设$z = f(x, y)$由方程$e^{xyz} + \sin(x^2 + y^2 + z^2) = 1$所确定，其中$f$可微。

   (1) 求全微分dz；

   (2) 在点$(0, 0, 0)$处计算$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$。

5. 计算$\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz$，其中$\Omega$由$z = \sqrt{x^2 + y^2}$和$z = 1$所围成。

四、证明题（10分）

设$f(x, y)$在闭区域$D \subset \mathbb{R}^2$上连续，且满足

$$\iint_D [f(x, y)]^2 \, dx\,dy = 0.$$

证明：在D上有$f(x, y) \equiv 0$。

参考答案

一、选择题答案

1. D

   (a) **求L_1 的方向向量$\vec{s_1}$**：由对称式直接得$\vec{s_1} = (2, -3, 1)$。

   (b) **求L_2 的方向向量$\vec{s_2}$**：由平面方程联立：

   $$\vec{n_1} = (1, 1, -1), \quad \vec{n_2} = (2, -1, 3)$$

   方向向量为两法向量的叉积：

   $$\vec{s_2} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (2, -5, -3)$$

   (c) **计算夹角余弦**：

   $$\cos\theta = \frac{|\vec{s_1} \cdot \vec{s_2}|}{\|\vec{s_1}\|\|\vec{s_2}\|} = \frac{|2 \times 2 + (-3) \times (-5) + 1 \times (-3)|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{38}} = \frac{16}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{38}}$$

   化简得：

   $$\cos\theta = \frac{16}{\sqrt{532}} = \frac{16}{2\sqrt{133}} = \frac{8}{\sqrt{133}}$$

2. B　方向导数为$\nabla f \cdot \vec{l} = \sqrt{2}$

3. B　$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$

4. B　$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{8}$

5. B　极坐标面积微元为$r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

二、填空题

1. 0
2. $\frac{1}{3}\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\mathrm{d}y$
3. $2x\cos y$
4. π　$\int_0^\pi \int_1^2 \frac{1}{r} \cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \int_1^2 1\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \pi$
5. $\int_0^1 \mathrm{d}y \left[\int_0^y \mathrm{d}z \int_0^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x + \int_y^1 \mathrm{d}z \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\right]$

三、计算题

1. (1) **计算质量M**：

   $$M = \iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{12}$$

   (2) **计算静矩**：

   $$M_y = \iint_D x^2 y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{56}, \quad M_x = \iint_D xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{56}$$

   (3) **求重心坐标**：

   $$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{9}{14}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{9}{14}$$

2. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf_1' + y\mathrm{e}^{xy}f_2'$
   $\frac{\partial z}{\partial y} = -2yf_1' + x\mathrm{e}^{xy}f_2'$

3. (a) 设拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x+y+z-1) + \mu(x-y+2z)$$

(b) 求偏导并令其为零：

$$\begin{cases} 2x+\lambda+\mu = 0 \\ 2y+\lambda-\mu = 0 \\ 2z+\lambda+2\mu = 0 \\ x+y+z-1 = 0 \\ x-y+2z = 0 \end{cases}$$

(c) 解方程组：

由前两式相减得： $2(x-y)+2\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad x-y = -\mu$

结合约束$x-y+2z = 0 \quad \Rightarrow \quad -\mu+2z = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 2z$

将$\mu = 2z$ 代入第三式： $2z+\lambda+4z = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -6z$

代入第一式： $2x-6z+2z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2z$

同理，第二式得： $y = 4z$

代入$x+y+z = 1 \quad \Rightarrow \quad 2z+4z+z = 1 \quad \Rightarrow \quad z = \dfrac{1}{7}$

因此： $x = \dfrac{2}{7}, \quad y = \dfrac{4}{7}, \quad z = \dfrac{1}{7}$

(d) 极值点：

$$\left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{1}{7}\right)$$

对应的函数值为：

$$f\left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{1}{7}\right) = \frac{4}{49} + \frac{16}{49} + \frac{1}{49} = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}$$

4. (1) **求全微分**$\mathrm{d}z$：对方程两边求全微分：

$$d(\mathrm{e}^{xyz}) + d(\sin(x^2+y^2+z^2)) = 0$$

计算得：

$$\mathrm{e}^{xyz}(yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z) + \cos(x^2+y^2+z^2)(2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y + 2z\,\mathrm{d}z) = 0$$

整理出$\mathrm{d}z$：

$$\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{e}^{xyz}yz + 2x\cos(x^2+y^2+z^2)}{\mathrm{e}^{xyz}xy + 2z\cos(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{e}^{xyz}xz + 2y\cos(x^2+y^2+z^2)}{\mathrm{e}^{xyz}xy + 2z\cos(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}y$$

(2) **在点**$(0,0,0)$ **处计算偏导数**：直接代入$(x,y,z) = (0,0,0)$ 会导致分母和分子均为零，需用极限法分析：

- **计算**$\frac{\partial z}{\partial x}$：固定$y = 0$，方程退化为：

$$\mathrm{e}^0 + \sin(x^2+z^2) = 1 \implies \sin(x^2+z^2) = 0.$$

其解为$x^2+z^2 = k\pi$（$k \in \mathbb{Z}$）。在$(0,0,0)$ 附近（$x \to 0$），唯一满足$z \to 0$ 的解是$k = 0$，即$z = 0$。因此：

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0,0)} = 0.$$

- **计算**$\frac{\partial z}{\partial y}$：同理，固定$x = 0$，方程退化为$\sin(y^2+z^2) = 0$，唯一解为$z = 0$，故：

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0,0)} = 0.$$

5. 使用柱坐标：$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1 z\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4}$

四、证明题

证明：假设存在点$(x_0, y_0) \in D$ 使得$f(x_0, y_0) \neq 0$。由于f 连续，存在邻域$U \subset D$ 使得在U 上$|f(x, y)| \geqslant \frac{|f(x_0, y_0)|}{2} > 0$。于是

$$\iint_D [f(x, y)]^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \iint_U [f(x, y)]^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \iint_U \left(\frac{|f(x_0, y_0)|}{2}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0,$$

这与已知条件矛盾。故$f(x, y) \equiv 0$。