华东师范大学期末试卷 (A)
2023–2024 学年第二学期

课程名称：高等数学 II

学生姓名：____________ 学号：____________

专业：____________ 年级/班级：____________

课程性质：专业必修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

第一题　选择题　(每小题 4 分, 共 20 分)

1. 关于曲面方程 $-\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1$, 描述不正确的是_____.
   A) 单叶曲面,　B) 双叶曲面,　C) 双曲面,　D) 旋转曲面.

2. 设有向曲面 Σ 关于 XOY 平面对称, Σ^+ 为其 $z\geq 0$ 的那部分. 则:
   当 $f(x,y,z)$ 为关于 z 的奇函数时, $\iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ ____ $\times\iint_{\Sigma^+} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;
   当 $f(x,y,z)$ 为关于 z 的偶函数时, $\iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ ____ $\times\iint_{\Sigma^+} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
   A) 2　2,　B) 2　0,　C) 0　2,　D) 0　0.

3. 散度和旋度的类型分别为____ 和____. (标量 = 一个数)
   A) 标量　标量,　B) 向量　标量,　C) 标量　向量,　D) 向量　向量.

4. 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 都是绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n+v_n)$ 是_____.
   A) 绝对收敛,　B) 条件收敛,　C) 不收敛,　D) 无法判断.

5. 微分方程 $y'^4-4yy''+15x^3+5xy^3=0$ 的阶数为_____.
   A) 1,　B) 2,　C) 3,　D) 4.

Answer: ABCAB

第二题　填空题　(每小题 4 分, 共 20 分)

1. 重积分 $\int_0^1\int_{x^2}^x g(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ 在交换积分次序后为_____.

2. 计算曲面积分 $\iint_\Sigma xyz\,\mathrm{d}S$ 为_____, 其中 Σ 为平面 $x+y+z=2$ 在第一卦限的那部分.

3. 体积微元 $\mathrm{d}V$ 在柱面坐标下的表示为_____, 在球面坐标下的表示为_____.

4. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ 的和是_____.

5. $y' - y = 2x - 3$的通解是______.

Answer: 1. $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} g(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$

2. $\sqrt{3}/30$

3. $\mathrm{d}\,V = r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\,z \qquad \mathrm{d}\,V = r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,\theta$

4. $\frac{1}{2}$

5. $C\mathrm{e}^x - 2x + 1$

第三题 (10 分) 已知$x = r\cos\theta$和$y = r\sin\theta$. 求以下偏导数x'_r, x'_θ, y'_r, y'_θ, r'_x, r'_y, θ'_x, θ'_y.
Answer: (4 分) 先计算偏导数

$$x'_r = \cos\theta, \qquad x'_\theta = -r\sin\theta, \qquad y'_r = \sin\theta, \qquad y'_\theta = r\cos\theta.$$

(2 分) 再求反函数$r = \sqrt{x^2+y^2}$和$\theta = \arctan(y/x)$.
(4 分) 最后计算偏导数

$$r'_x = x/\sqrt{x^2+y^2}, \qquad r'_y = y/\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta'_x = -y/(x^2+y^2), \qquad \theta'_y = x/(x^2+y^2).$$

第四题 (10 分) 求由圆锥曲面$z^2 = x^2+y^2\,(z \geq 0)$和平面$z = h$所围成立体的形心. (即质量密度均匀时立体的重心)
Answer: (2 分) 由于该立体Ω关于Z轴旋转而成, 因此$\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$.
(2 分) 令$D_{xy} := x^2+y^2 \leq h$, 立体Ω可表示为$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq h$, 其中$(x,y) \in D_{xy}$.
(4 分) 不妨设密度系数为1, 我们有

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z &= \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h} \mathrm{d}\,z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta \int_0^h r\,\mathrm{d}\,r \int_r^h \mathrm{d}\,z \\ &= 2\pi \int_0^h r(h-r)\,\mathrm{d}\,r = 2\pi\frac{h^3}{6} = \frac{\pi h^3}{3}, \\ \iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z &= \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h} z\,\mathrm{d}\,z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta \int_0^h r\,\mathrm{d}\,r \int_r^h z\,\mathrm{d}\,z \\ &= 2\pi \int_0^h \frac{r(h^2-r^2)}{2}\,\mathrm{d}\,r = 2\pi\frac{h^4}{8} = \frac{\pi h^4}{4}.\end{aligned}$$

(2 分) 因此$\bar{z} = \dfrac{\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z}{\iiint_\Omega \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z} = \frac{3h}{4}$, 该立体的形心为$(0,\ 0,\ \frac{3h}{4})$.

第五题 (8 分) 计算第二型曲线积分$\int_L y\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,y$, 其中$L$为沿着抛物线$y = x^2$从$(1,1)$移动到$(2,4)$的那段曲线.
Answer: (8 分)

$$\int_L y\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,y = \int_L x^2\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,x^2 = \int_1^2 x^2\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,x^2 = \int_1^2 3x^2\,\mathrm{d}\,x = x^3\big|_1^2 = 7.$$

第六题 (12 分) 设 Ω 是空间一单连通域, 函数 P, Q, R 在 Ω 内具有连续一阶偏导数. 证明以下四个命题互相等价:

a 对 Ω 内任一分段光滑曲线 L, 积分 $\int_L P\,\mathrm{d}\,x + Q\,\mathrm{d}\,y + R\,\mathrm{d}\,z$ 是路径无关的.

b 在 Ω 上存在某一函数 u, 使得 $\mathrm{d}\,u = P\,\mathrm{d}\,x + Q\,\mathrm{d}\,y + R\,\mathrm{d}\,z$.

c 在 Ω 内处处有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}$.

d 对 Ω 内任一分段光滑闭曲线 L, 都有 $\oint_L P\,\mathrm{d}\,x + Q\,\mathrm{d}\,y + R\,\mathrm{d}\,z = 0$.

Answer: (3 分) $a \Rightarrow b$. 在 Ω 内取一点 $A(x_0, y_0, z_0)$, 由条件得, 对 Ω 内任意一点 $B(x, y, z)$, $\int_{\widehat{AB}} P\,\mathrm{d}\,x + Q\,\mathrm{d}\,y + R\,\mathrm{d}\,z$ 只与 A, B 有关, 而与路径无关. 令

$$u(x, y, z) = \int_{\widehat{AB}} P\,\mathrm{d}\,x + Q\,\mathrm{d}\,y + R\,\mathrm{d}\,z.$$

因为

$$\begin{aligned}\Delta_x u = u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z) &= \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} P(x, y, z)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \int_x^{x+\Delta x} P(t, y, z)\,\mathrm{d}\,t \\ &= P(x + \theta\Delta x, y, z)\Delta x, \quad 0 < \theta < 1.\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} P(x + \theta\Delta x, y, z) = P(x, y, z).$$

同理可证, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y, z)$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z)$. 又因为 P, Q, R 在 Ω 内连续, 故 $u(x, y, z)$ 在 Ω 内可微, 因此得 $\mathrm{d}\,u = P\,\mathrm{d}\,x + Q\,\mathrm{d}\,y + R\,\mathrm{d}\,z$.

(3 分) $b \Rightarrow c$. 在 Ω 上存在某一函数 u, 使得 $\mathrm{d}\,u = P\,\mathrm{d}\,x + Q\,\mathrm{d}\,y + R\,\mathrm{d}\,z$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R.$$

又由于 P, Q, R 在 Ω 上都具有连续一阶偏导数, 因而

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, & \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}, & \frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}, \\ \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}, & \frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}\end{aligned}$$

在 Ω 内都连续, 因此

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

(3 分) $c \Rightarrow d$. 设光滑曲线 L 围成的区域为 G, 根据 Stokes 公式,

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \oint_L P\,\mathrm{d}\,x + Q\,\mathrm{d}\,y + R\,\mathrm{d}\,z,$$

其中 L 关于 G 取正向, 由 c 中的条件得

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \iint_G 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0.$$

(3 分) $d \Rightarrow a$. 对于 Ω 内任一分段光滑曲线 L, 设其端点为 A 和 B. 任取区域 Ω 内从 A 到 B 的分段光滑有向曲线 L_0, 且记 L_0^- 为 L_0 的同路径但反方向的曲线.

若 L_0 和 L 不相交, 此时 $L \cup L_0^-$ 为分段光滑的封闭曲线, 因此由条件得

$$\begin{aligned}
&\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z - \int_{L_0} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z \\
=& \int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z + \int_{L_0^-} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z \\
=& \left(\int_L + \int_{L_0^-}\right) P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = 0.
\end{aligned}$$

因此

$$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int_{L_0} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z.$$

若 L_0 和 L 相交, 可做第三条从 A 到 B 的有向光滑曲线 L_1, 使其与 L 和 L_0 都不相交. 由已证结果得, 沿着 L_1 的积分和沿着 L, L_0 的积分都相等, 因此沿着 L 的积分和 L_0 的积分相等.

第七题 (10 分) 求以下两个幂级数的收敛半径, 并讨论在收敛区间端点处的收敛性.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n \qquad \text{和} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a^{n^2} x^n \ (\text{其中}\ 0 < a < 1).$$

Answer: 对于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$: (3 分) 我们有一般项系数 $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. 故

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\right| = \frac{1}{4},$$

即收敛半径为 4.

(3 分) 定义双阶乘记号

$$\begin{aligned}
&n!! = n\cdot(n-2)!! \qquad (n>2) \\
&1!! = 0!! = 1.
\end{aligned}$$

当 $x = \pm 4$ 时, 级数一般项的绝对值为

$$|u_n x^n| = \frac{(n!)^2}{(2n)!}(4)^n = \frac{(2n)!!(2n)!!}{(2n)!!(2n-1)!!} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} > 1$$

不收敛到零. 因此级数在收敛区间端点处发散.

对于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a^{n^2} x^n$: (4 分) 我们有一般项系数 $u_n = a^{n^2}$. 故

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} a^n = 0,$$

因此级数的收敛半径为 $R = +\infty$, 收敛区域为 $(-\infty, +\infty)$.

第八题 (10 分) 设 $p > 0$, 证明级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

收敛, 且和在 $\frac{1}{2}$ 和 1 之间. (提示: 当 $x > 0$ 时, $f(x) = 1/x^p$ 是凸函数.)

Answer: (3 分) 交错级数 + 一般项递减收敛到 0, 所以级数收敛.

(2 分) 首项 $u_1 = 1$, 所以级数小于 1.

(5 分) 因为凸函数, 偶数项

$$u_{2k} = -\frac{1}{k^p} \geq -\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{(k-1)^p} + \frac{1}{(k+1)^p}\right] = -\tfrac{1}{2}[u_{2k-1} + u_{2k+1}],$$

从而

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} u_k \geq \tfrac{1}{2}u_1 - \tfrac{1}{2}u_{2n+1} \qquad \text{以及} \qquad S_{2n+1} \geq \tfrac{1}{2}u_1 + \tfrac{1}{2}u_{2n+1}.$$

部分和序列收敛值 $\lim_{n\to\infty} S_n \geq \frac{1}{2}u_1 = \frac{1}{2}$.