华东师范大学期中试卷

2023—2024　学年第　2　学期

课程名称：　高等数学（二）

学生姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿　　　　学　　号：＿＿＿＿＿＿＿＿

专　　业：＿＿＿＿＿＿＿＿　　　　年级/班级：＿＿＿＿＿＿＿＿

课程性质：专业选修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

…………………………………………………………………………

一、选择题（20 分，每题 4 分）

1. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则 (D)

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点　　(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点　　(D) 根据所给条件无法判别点$(0,0)$是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$(D)

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$　　(B) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$　　(D) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$.

3. 在曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 的所有切线中，平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线(B)

(A) 只有 1 条　　(B) 只有 2 条.

(C) 至少有 3 条　　(D) 不存在.

4. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的 (D)

(A) 充分条件而非必要条件　　(B) 必要条件而非充分条件.

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分条件又非必要条件.

5. 设有空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, z\geqslant 0$; 及 $\Omega_2: x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$, 则 (C)

(A) $\iiint_{\Omega_1} x \ \mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} x \ \mathrm{d}v$ (B) $\iiint_{\Omega_1} y \ \mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} y \ \mathrm{d}v.$

(C) $\iiint_{\Omega_1} z \ \mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} z \ \mathrm{d}v.$ (D) $\iiint_{\Omega_1} xyz \ \mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} xyz \ \mathrm{d}v.$

二、填空题（20 分，每题 4 分）

1. 设二元函数 $f(x,y)$ 在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上可微，(a,b) 为平面 $\mathbb{R}^2$ 上给定的一点，$\mathrm{d}f(a,b) = 3 \ \mathrm{d}x - \mathrm{d}y$，则极限 $\lim_{x\to 0} \frac{f(a+x,b+x)-f(a,b)}{x} =$ __2____.

2. 由方程 $xyz + \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的函数 $z = z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z =$ _$dx - \sqrt{2}dy$___.

3. 由曲线 $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 12 \\ z = 0 \end{cases}$，绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为_$(0,\sqrt{\frac{2}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}})$___.

4. 设区域 D 为 $x^2+y^2 \leqslant R^2$，则 $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$_$\frac{\pi R^4}{4}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})$__.

5. 设$z = \frac{1}{x}f(xy) + y\varphi(x+y), f, \varphi$具有二阶连续导数，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} =$_$-\frac{1}{x}f'(xy) + f''(xy)y + \frac{1}{x}f'(xy) + \phi'(x+y) + y\phi''(x+y)$__.

三、（10 分）求与两直线$\begin{cases} x = 1, \\ y = -1+t, \\ z = 2+t \end{cases}$及$\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$ 都平行，且过原点的平面方程

答:

由题意可知，两直线的方向向量分别为:

$\vec{a} = (0,1,1)$和$\vec{b} = (1,2,1)$ ---(2')

那么与两直线都平行的平面的法向量$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

计算可得$\vec{n} = (-1,1,-1)$---(4')

又平面过原点$O(0,0,0)$

故平面的点法式方程为$-x+y-z=0$-----------------------------------(4')

四、（10 分）求函数在指定点 P 沿指定方向 L 的方向导数，函数 u = ln r，其中 r = $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，P（3，4，12），L =（3，6，-2）.

解:
由题意可知

$$u_x=\frac{du}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$$

$$u_y=\frac{du}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}=-\frac{y}{x^2+y^2+z^2}$$

$$u_z=\frac{du}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}=-\frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

带入 P 点坐标可得

$u_x(3,4,12)=-\frac{3}{169}$; $u_y(3,4,12)=-\frac{4}{169}$; $u_z(3,4,12)=-\frac{12}{169}$ ------------- (4')

方向 L 的单位方向向量为

$\vec{e_l}=\left(\frac{3}{7},\frac{6}{7},-\frac{2}{7}\right)$-- (2')

带入计算有:

$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(3,4,12)}=-\frac{3}{169}\times\frac{3}{7}-\frac{4}{169}\times\frac{6}{7}+\frac{12}{169}\times\frac{2}{7}=-\frac{9}{1183}$-------------------------- (4')

五、(10 分)利用二重积分求由不等式 $r\le a(1+cos\theta)$ 及 $r\le a$ 所决定图形 D 的面积.

解:由 $a(1+\cos\theta)=a$,可得 $\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$.------------------------(2')

由对称性,

$S\ =2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^{a(1+cos\theta)}rdr\right)$---------------------(4')

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}a^2d\theta+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{2}a^2(1+cos\theta)^2d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^2+a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+2cos\theta+cos^2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^2+\left(\frac{3}{4}\pi-2\right)a^2$$

$=\left(\frac{5}{4}\pi-2\right)a^2$---------------------------------------(4')

六、(10 分)已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$,求曲线 C 上距离 xOy 平面最

远和最近的点的坐标.

解：构造拉格朗日函数为

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)= z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$$ -------（2’）

求解方程组：

$$\begin{cases} L_x=2\lambda x+\mu=0, \\ L_y=2\lambda y+\mu=0, \\ L_z=2z-4\lambda z+3\mu=0, \\ L_\lambda=x^2+y^2-2x^2=0, \\ L_\mu=x+y+3z-5=0. \end{cases}$$ ------------------------------（4’）

解得 $x=y$, 从而 $\begin{cases} 2x^2-2z^2=0, \\ 2x+3z=5. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-5, \\ y=-5, \\ z=5, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1, \\ y=1, \\ z=1. \end{cases}$ ----------（4’）

故所求点依次为(-5,-5,5)和(1,1,1)

七、（10 分）$\begin{cases} u=f(ux,v+y), \\ v=g(u-x,v^2y), \end{cases}$ 其中f,g有一阶连续偏导数，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$.

解:

设$\begin{cases} F(x,y,u,v)=u-f(ux,v+y) \\ G(x,y,u,v)=v-g(u-x,v^2y) \end{cases}$

则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

其中

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$ --------------------------------------(4’)

我们已知F、G，且f，g有一阶连续偏导数，可求

$$\begin{cases} F_x=-uf_1, F_u=1-xf_1, F_v=-f_2 \\ G_x=g_1, G_u=-g_1, G_v=1-2vyg_2 \end{cases}$$ --------------------------------(4’)

代入上述公式得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{F_xG_v-F_vG_x}{F_uG_v-F_vG_u}=\frac{uf_1(1-2vyg_2)-f_2g_2}{(1-xf_1)(1-2vyg_2)-f_2g_1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{F_uG_x-F_xG_u}{F_uG_v-F_vG_u}=\frac{uf_1g_1-(1-xf_1)g_1}{(1-xf_1)(1-2vyg_2)-f_2g_1}$$ --------------------------------(2’)

八、（10 分）平面上有一半圆形薄片 D，该薄片 D 中点的坐标满足

$$x^2+y^2\le a^2,(-a\le x\le a,0\le y\le a)$$

其上每一点的密度等于该点的纵坐标，求物体的重心G.

解:

已知该半圆形物体的曲面方程和每点密度，可得

$$\begin{cases} x_G=0 \\ y_G=\dfrac{\iint_D y^2\,d\sigma}{\iint_D y\,d\sigma} \end{cases}$$ ---(2')

由于积分区域为半圆形，可转换为极坐标形式简化计算

$$y_G=\frac{\iint_D r^3\,sin^2\,\theta\,dr\,d\theta}{\iint_D r^2\sin\theta\,dr\,d\theta}$$ --(4')

$$y_G=\frac{\int_0^a r^3\,dr\cdot\int_0^\pi sin^2\,\theta\,d\theta}{\int_0^a r^2\,dr\cdot\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta}$$

$$y_G=\frac{\left(\frac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^a\cdot\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_0^\pi}{\left(\frac{1}{3}r^3\right)\Big|_0^a\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^\pi}$$

$$y_G=\frac{\frac{1}{4}a^4\cdot\frac{1}{2}\pi}{\frac{1}{3}a^3\cdot(\cos 0-\cos\pi)}=\frac{3}{16}\pi a$$ -------------------------------------(4')

所以物体的重心 G 为$\left(0,\frac{3}{16}\pi a\right)$