华东师范大学期中试卷答案
2024-2025 学年第一学期

一、(7 分)

解: 利用行列式性质直接将它化成“爪”型行列式. 第 2 行, 第 3 行, $\cdots$, 第 n 行分别减去第 1 行, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

将第 i 行分别提出因子 $a_i(i=2,\cdots,n)$, 得

$$D_n = a_2a_3\cdots a_n \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -\frac{a_1}{a_2} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{a_1}{a_3} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_1}{a_{n-1}} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -\frac{a_1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

将第 1 行分别减去第 2 行、第 3 行、$\cdots$、第 n 行, 得

$$D_n = a_2a_3\cdots a_n \begin{vmatrix} 1+a_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_1}{a_2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_1}{a_3} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_2a_3\cdots a_n\left(1+a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i}\right)$$

$$= a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$$

二、(14 分)

(1) (7 分) 解: 由第 1 列展开

$$D_n = xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n \cdot (-1)^{n-1} \\
&= a_n + xD_{n-1} \\
&= a_n + x(xD_{n-2} + a_{n-1}) \\
&= \dots \\
&= a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_2x^{n-2} + x^{n-1}D_1 \\
&= a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1x^{n-1}
\end{aligned}
$$

(2) (7 分) 解: 按第一行展开得

$$
\begin{aligned}
D_n = (a+b)D_{n-1} - ab &\begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} \\
= (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}
\end{aligned}
$$

则

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$$

且

$$
\begin{aligned}
D_1 &= |a+b| = a+b \\
D_2 &= \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = a^2 + ab + b^2 \\
D_n - aD_{n-1} = b^{n-1}(D_2 - aD_1) &= b^{n-2}(a^2 + ab + b^2 - a^2 - ab) = b^n
\end{aligned}
$$

所以

$$D_n = aD_{n-1} + b^n = \cdots = a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n$$

三、(7 分)

解法一: 因为 A_{i2} 为 D 中元素 a_{i2} 的代数余子式 $(i = 1, 2, 3, 4)$，故将 D 中第 2 列的元素依次换为 3,7,4,8，即得

$$3A_{12} + 7A_{22} + 4A_{32} + 8A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

解法二: 因 3,7,4,8 恰为 D 中第 3 列元素，而 $A_{12}, A_{22}, A_{32}, A_{42}$ 为 D 中第 2 列元素的代数余子式, 故 $3A_{12} + 7A_{22} + 4A_{32} + 8A_{42}$ 表示 D 中第 3 列元素与第 2 列的对应元素的代数余子式乘积的和，则

$$3A_{12} + 7A_{22} + 4A_{32} + 8A_{42} = 0.$$

四、(14 分)

(1) (6 分) 证明：左 $= a^2(a+b) + 2ab^2 + 2ab^2 - b^2(a+b) - 2a^2b - 2ba^2$

$= a^3 + 3ab^2 - 3a^2b - b^3$

$= (a-b)^3 =$ 右

故原式成立.

(2) (8 分) 思路分析: 基本思路是拆分行列式, 将左边的行列式拆分为 8 个行列式, 由左往右证.

证明: 左 $= \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & ay & bx \\ ay & az & by \\ az & ax & bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & bz & az \\ ay & bx & ax \\ az & by & ay \end{vmatrix} +$

$\begin{vmatrix} ax & bz & bx \\ ay & bx & by \\ az & by & bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay & az \\ bz & az & ax \\ bx & ax & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay & bx \\ bz & az & by \\ bx & ax & bz \end{vmatrix} +$

$\begin{vmatrix} by & bz & az \\ bz & bx & ax \\ bx & by & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bz & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix}$

$$= a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

.

将上式右边的行列式 $c_1 \leftrightarrow c_3, c_2 \leftrightarrow c_3$, 得

左 $= a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$.

五、(7 分)

证明：$\mathbf{E}-\mathbf{J}$ 对应的行列式为

$$|\mathbf{E}-\mathbf{J}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(n-1) & -(n-1) & \cdots & -(n-1) \\ -1 & 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = -(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(n-1) \neq 0,$$

故 $(\mathbf{E}-\mathbf{J})$ 可逆.

$$\mathbf{J}^2=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}n&n&\cdots&n\\n&n&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\n&n&\cdots&n\end{vmatrix}=n\mathbf{J}.$$

由 $(\mathbf{E}-\mathbf{J})(\mathbf{E}-\frac{1}{n-1}\mathbf{J})=\mathbf{E}-\frac{1}{n-1}\mathbf{J}-\mathbf{J}+\frac{1}{n-1}\mathbf{J}^2=\mathbf{E}-\frac{n}{n-1}\mathbf{J}+\frac{1}{n-1}\cdot n\mathbf{J}=\mathbf{E}$, 故

$$(\mathbf{E}-\mathbf{J})^{-1}=\mathbf{E}-\frac{1}{n-1}\mathbf{J}.$$

六、(6 分)

证明：因为 $\mathbf{A}\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{E}$, $\mathbf{A}$ 可逆，$|\mathbf{A}|\neq\mathbf{0}$, 有

$$|\mathbf{A}||\mathbf{A}^*|=||\mathbf{A}|\mathbf{E}|$$

即

$$|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^n,\quad |\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}\neq 0$$

所以 $\mathbf{A}^*$ 可逆，且 $\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$, 则

$$(\mathbf{A}^*)^{-1}=(|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}$$

而

$$(\mathbf{A}^{-1})^*=|\mathbf{A}^{-1}|(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\cdot\mathbf{A}$$

故

$$(\mathbf{A}^*)^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^*$$

七、(10 分)

解：(1) (4 分) $\mathbf{A}^3=\mathbf{O}, |\mathbf{A}|=0$, 即

$$\begin{vmatrix}a&1&0\\1&a&-1\\0&1&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0\\1-a^2&a&-1\\-a&1&a\end{vmatrix}=a^3=0$$

故 $a=0$

（2）(6 分) 由题意知

$$\mathbf{X}-\mathbf{X}\mathbf{A}^2-\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A}^2=\mathbf{E}$$

即

$$\mathbf{X}(\mathbf{E}-\mathbf{A}^2)-\mathbf{A}\mathbf{X}(\mathbf{E}-\mathbf{A}^2)=\mathbf{E}$$

$$(\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{X}(\mathbf{E}-\mathbf{A}^2)=\mathbf{E}$$

则

$$\mathbf{X}=(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{E}-\mathbf{A}^2)^{-1}=[(\mathbf{E}-\mathbf{A}^2)(\mathbf{E}-\mathbf{A})]^{-1}=(\mathbf{E}-\mathbf{A}^2-\mathbf{A})^{-1}$$

故

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&1&1\\-1&-1&2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-1\end{bmatrix}$$

八、(10 分)

解：系数行列式

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

(1) 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 10$ 时，$|\mathbf{A}| \neq 0$，方程组有唯一解.

(2) 当 $\lambda = 10$ 时,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & -5 & -11 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & -18 & -18 & 9 \\ 0 & -9 & -9 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

此时 $R(\mathbf{A}) = 2 \neq 3 = R(\mathbf{B})$，方程组无解.

(3) 当 $\lambda = 1$ 时,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此时 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B}) = 1 < 3$（未知量的个数），方程组有无限多解，通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数})$$

九、(8 分)

(1)（3 分）证明：由 $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{AB}$，则

$$\mathbf{AB} - \mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{E} = (\mathbf{A}-\mathbf{E})(\mathbf{B}-\mathbf{E}) = \mathbf{E}$$

故 $\mathbf{A}-\mathbf{E}$ 可逆.

(2) (5 分) 解：由 (1) 知

$$\mathbf{A}-\mathbf{E} = (\mathbf{B}-\mathbf{E})^{-1}$$

故

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{E} + (\mathbf{B}-\mathbf{E})^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

十、(7 分)

证明：充分性　令 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)^T$，$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. 由于 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}^T$ 非零, 故 $\mathbf{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T = (a_i b_j) \neq \mathbf{O}$ 且 $R(\boldsymbol{\alpha}) = R(\boldsymbol{\beta}^T) = 1$, 从而

$$1 \leq R(\mathbf{A}) = R(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T) \leq \min(R(\boldsymbol{\alpha}), R(\boldsymbol{\beta}^T)) = 1$$

所以 $R(\mathbf{A})=1$.

必要性　设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，因 $R(\mathbf{A})=1$, 故存在 m,n 阶可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$，使得

$$\begin{aligned}\mathbf{A}&=\mathbf{P}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}(1,0,\cdots,0)\mathbf{Q}\\&=(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\dots,\mathbf{p}_m)\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}(1,0,\dots,0)\begin{pmatrix}\mathbf{q}_1^T\\\mathbf{q}_2^T\\\vdots\\\mathbf{q}_n^T\end{pmatrix}\\&=\mathbf{p}_1\mathbf{q}_1^T\end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{p}_1,\boldsymbol{\beta}=\mathbf{q}_1$，因此存在非零列向量 α 及非零行向量 $\boldsymbol{\beta}^T$，使得 $\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$.

十一、(10 分)

解: 设矩阵 $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$, 则

$$\mathbf{AC}=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+ax_3&x_2+ax_4\\x_1&x_2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{CA}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2&ax_1\\x_3+x_4&ax_3\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AC}-\mathbf{CA}=\begin{pmatrix}x_1+ax_3&x_2+ax_4\\x_1&x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1+x_2&ax_1\\x_3+x_4&ax_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax_3-x_2&ax_4-ax_1\\-(x_3+x_4)&x_2-ax_3\end{pmatrix}$$

由 $\mathbf{AC}-\mathbf{CA}=\mathbf{B}$，得

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\-ax_1+x_2+ax_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2-ax_3=b\end{cases}$$

此为四元非齐次线性方程组，欲使得矩阵 $\mathbf{C}$ 存在，则此非齐次线性方程组必有解，而该非齐次线性方程对应的增广矩阵为

$$\bar{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}0&-1&a&0&0\\-a&1&0&a&1\\1&0&-1&-1&1\\0&1&-1&0&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&0\\0&0&0&0&b\\0&0&0&0&1+a\end{pmatrix}$$

所以当 $1+a=0,b=0$, 即 $a=-1,b=0$ 时，非齐次线性方程组有解，存在矩阵 $\mathbf{C}$，使得 $\mathbf{AC}-\mathbf{CA}=\mathbf{B}$. 又

$$\bar{\mathbf{A}}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + 1 \\ -c_1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

所以

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + 1 & -c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} (c_1, c_2 \text{ 为任意实数})$$