华东师范大学期中试卷(A)

2024 — 2025 学年第一学期

课程名称: 线性代数

学生姓名: ____________________ 学 号: ____________________

专 业: ____________________ 年级/班级: ____________________

课程性质: 公共必修、公共选修、**专业必修**、专业选修

一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分	**阅卷人签名**

一、(7 分)计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix},$$

其中$a_1a_2\cdots a_n\neq 0.$

二、(14 分)(1)(7 分)计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1\\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1\end{vmatrix}.$$

(2)(7 分)计算n阶三对角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b\end{vmatrix},$$

三、（7 分）设$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\2&3&4&5\\6&7&8&9\end{vmatrix}$，求$3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}$，其中$A_{i2}(\mathrm{i}=1,2,3,4)$为 D 中元素$a_{i2}$的代数余子式.

四、（14 分）证明:

(1)（6 分）$\begin{vmatrix}a^2&ab&b^2\\2a&a+b&2b\\1&1&1\end{vmatrix}=(a-b)^3$;

(2) (8 分) $\begin{vmatrix}ax+by&ay+bz&az+bx\\ay+bz&az+bx&ax+by\\az+bx&ax+by&ay+bz\end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix}x&y&z\\y&z&x\\z&x&y\end{vmatrix}$.

五、（7 分）设J是元素全为 1 的$\mathrm{n}(\mathrm{n}\geq 2)$阶方阵，证明$E-J$是可逆方阵，且$(\mathrm{E}-\mathrm{J})^{-1}=\mathrm{E}-\frac{1}{\mathrm{n}-1}\mathrm{J}$，其中E是与J同阶的单位矩阵.

六、（6 分）设n阶矩阵A可逆，证明其伴随矩阵A^*也可逆，且$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

七、（10 分）设矩阵$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}a&1&0\\1&a&-1\\0&1&a\end{bmatrix}$，且$A^3=\mathbf{0}$.

(1) （4 分）求a的值；
(2) （6 分）若矩阵X满足$\mathrm{X}-\mathrm{X}A^2-\mathrm{AX}+\mathrm{AX}A^2=\mathrm{E}$，E为 3 阶单位阵，求X.

八、（10 分）设$\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1,\\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2,\\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1\end{cases}$，求$\lambda$为何值时此方程组有唯一解、无解或无限多解，并在无限多解时求其通解.

九 、（8 分）设n阶矩阵A和B满足条件$A+B=AB$.

(1) （3 分）证明：$A-E$为可逆矩阵，其中E为n阶单位矩阵；

(2) （5 分）已知$B=\begin{bmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$， 求矩阵$A$.

十、（7 分）证明$\mathrm{R(A)}=1$的充要条件是存在非零列向量$\boldsymbol{\alpha}$及非零行向量$\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}$,使$\mathrm{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}$.

十一、（10 分）设$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & \mathrm{a}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$, 当$a,b$为何值时，存在矩阵$C$使得$AC-CA=B$，并求所有矩阵$C$.