华东师范大学期中试卷(A)

2023—2024 学年第一学期

课程名称: 线性代数

学生姓名: ________ 学 号: ________

专 业: ________ 年级/班级: ________

课程性质：公共必修、公共选修、专业必修、专业选修

一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分	阅卷人签名

一、 （本题满分 10 分）计算行列式

a) $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 3 & x & 1 & 2 \\ x & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

二、 （本题满分 15 分）计算行列式

a) $\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$

b) $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}$

三、 （本题满分 10 分）已知行列式$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$，$M_{ij}$、$A_{ij}$分别是$D$中元素$a_{ij}$的余子式和代数余子式，试求：

（1） $4M_{42}+2M_{43}+2M_{44}$

（2） $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$

四、 （本题满分 8 分）已知$a^2\neq b^2$，证明方程组：

$$\begin{cases} ax_1 + bx_{2n} = 1, \\ ax_2 + bx_{2n-1} = 1, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ ax_n + bx_{n+1} = 1, \\ bx_n + ax_{n+1} = 1, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ bx_2 + ax_{2n-1} = 1, \\ bx_1 + ax_{2n} = 1 \end{cases}$$

有唯一解，并求解.

五、 （本题满分 7 分）问λ，μ取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解？

六、 （本题满分 15 分）设n阶方阵$A=\begin{bmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & a^2 & 2a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & a^2 & 2a \end{bmatrix}$

a) 求det(A).

b) 若方程组Ax = b有唯一解，a应该如何取值，其中$b=[1\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0]^T$.

c) 求方程组的解.

七、 （本题满分 10 分）设$a=[-1\ \ 0\ \ 1]^T$，矩阵$A=3I-aa^T$.

a) 求矩阵 A;

b) A 是否可逆？若可逆，求A^{-1}.

八、 **（本题满分 10 分）**设n阶方阵A，B和$A+B$均可逆，证明：

a） $A^{-1}+B^{-1}$也可逆，且$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A$；

b） $(A+B)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}$

九、 **（本题满分 15 分）**设n阶方阵A,B满足$\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{AB}$.

a） 证明：$\mathrm{A}-\mathrm{I}$可逆.

b） 证明：$\mathrm{AB}=\mathrm{BA}$.

c） 若$\mathrm{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$，求A.